Beiträge
zur
Theorie eines Raumes
von *n* Dimensionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

philosophischen Facultät

der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

eingereicht und mit den beigefügten Thesen vertheidigt

am 14. Juli 1877, Vormittags 12 Uhr

von

Ludwig Kaiser,
Oberlehrer in Remscheid.

Opponenten:
Dr. jur. J. Rosenthal.
Cand. math. H. Kaiser.
Stud. rer. nat. R. Nelson.

Bonn,
Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi.

Seit Cartesius hat sich zwischen der Geometrie und Algebra eine innige und fruchtbare Wechselbeziehung zum Vortheil beider Disciplinen mehr und mehr entwickelt. Die analytische Geometrie deducirt ihre Sätze vorzugsweise mit Hülfe des algebraischen Calcüls und umgekehrt verdankt die Analysis ihrer Anwendung auf die Geometrie in nicht geringem Maasse die Klarheit ihrer Begriffe, die Einfachheit und Deutlichkeit ihrer Ausdrucksweise. Dieser Vortheil geht indessen verloren, sobald in der zu discutirenden Function die Anzahl der Variabelen mehr als drei beträgt, weil eben der Raum nur drei Dimensionen hat und die Lage eines freien Punktes im Raume durch drei von einander unabhängige Coordinaten bestimmt ist. Für Functionen von mehr als drei Variabelen wird die geometrische Deutung illusorisch, es sei denn, dass man sich entschliesst an Stelle des empirischen einen idealen Raum von n Dimensionen zu setzen und die Definition der geometrischen Grundbegriffe in passender Weise zu erweitern. In der That berechtigt die Analogie gewisser Formeln aus der analytischen Geometrie der Ebene wie des Raumes zu einer solchen Erweiterung der Begriffe. So ist z. B. das Quadrat der Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 in der Ebene:

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

und im Raume:

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Der Cosinus des von zwei vom Coordinatenanfang nach den beiden Puncten P_1 und P_2 führenden Geraden gebildeten Winkels ist:

$$\cos\vartheta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}},\quad \text{respective}$$

$$\cos\vartheta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

und man bemerkt leicht, wie sich die Formeln für den Raum aus denen für die Ebene geltenden durch das Hinzutreten der dritten Coordinate z ergänzen. Es liegt nahe, solche und ähnliche Formeln in derselben Weise durch Hinzufügung weiterer Coordinaten für einen idealen Raum von n Dimensionen zu erweitern um für die Untersuchung von Functionen beliebig vieler Variabelen ebenfalls eine geometrische Sprache zu gewinnen. So wird z. B. allgemein die Bezeichnung „orthogonale Substitution", welche ursprünglich nur auf den Uebergang von einem zu einem anderen rechtwinkligen Coordinatensystem passt, auf jede lineare Substitution ausgedehnt, welche die Quadratsumme der ursprünglichen in dieselbe Function der neuen Variabelen überführt. Eine orthogonale Substitution für drei Variabelen x, y, z stellt nun die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt im Raum dar. In analoger Weise erörtert die in Crelle's Journal, Band 65 pag. 185 veröffentlichte Abhandlung von Schläfli „über invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution etc." die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt unter Voraussetzung eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen. Die vorliegende Untersuchung wird sich vorwiegend an diese Abhandlung anschliessen, die in derselben ohne Beweis mitgetheilten Resultate vollständig begründen und zu Ergebnissen führen, die mit den verschiedensten mathematischen Problemen in mehr oder weniger naher Beziehung stehen und deren Bedeutung ganz unabhängig davon ist, ob man einen idealen Raum von n Dimensionen gelten lassen will oder nicht. Wir beginnen damit die geometrischen Grundbegriffe für einen solchen Raum zu definiren.

1. Wenn jede der n willkürlichen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ für sich einen festen Werth annimmt, so wird durch das Zusammengelten dieser n Werthe ein fester Punkt bestimmt und jene n Variabelen können übereinstimmend mit dem geometrischen Sprachgebrauche als die Coordinaten eines Punktes bezeichnet werden. — Die Gleichungen eines Punktes P sind demnach: $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$, und in gleicher Weise wird durch n von einander unabhängige lineare Gleichungen zwischen den Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ ein fester Punkt repräsentirt. Die Gleichungen des Coordinatenanfangspunktes sind: $x_1 = x_2 \ldots \ldots = x_n = 0$.

Anmerkung. Da alle noch ferner zu definirenden in der nachfolgenden Abhandlung auftretenden Oerter den Anfangspunkt enthalten, so lassen wir den ausdrücklichen Zusatz „durch den Anfangspunkt gehend" weg.

2. Wenn die Coordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ nicht fixirt, sondern nur in ihren gegenseitigen Verhältnissen gegeben sind, so ist ein „Strahl" bestimmt. Ein Strahl ist daher ebensowohl durch die Proportion

$$x_1 : x_2 \ldots : x_n = a_1 : a_2 \ldots : a_n,$$

als auch durch $n-1$ von einander unabhängige homogene lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten repräsentirt.

3. Wenn zwischen den n Coordinaten $n-2$ von einander unabhängige homogene lineare Gleichungen bestehen, wenn sich also $n-2$ Coordinaten als homogene lineare Functionen zweier willkürlicher Variabelen ausdrücken lassen, so ist eine „Ebene" bestimmt und die Gleichungen derselben sind in einfachster Form:

$$x_1 = a_1\, x + b_1\, y,\; x_2 = a_2\, x + b_2\, y, \ldots x_{n-2} = a_{n-2}\, x + b_{n-2}\, y.$$

4. Wenn zwischen den n Coordinaten $n-r$ homogene lineare von einander unabhängige Gleichungen bestehen, wenn sich also $n-r$ Coordinaten als homogene lineare Functionen von r willkürlichen Variabelen ausdrücken, so ist ein „(∞^r), d. h. ein lineares Continuum von r Dimensionen" bestimmt. Die Gleichungen eines (∞^r) sind in einfachster Form:

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots$$
$$x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z \ldots$$
$$\vdots$$
$$x_{n-r} = a_{n-r} x + b_{n-r} y + c_{n-r} z + \ldots.$$

5. Die Quadratsumme der Coordinaten eines Punktes ist das „Quadrat seiner Entfernung vom Anfangspunkt“. Wenn nun eine orthogonale Substitution

$$x_1 = a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 \ldots. + a_{1n} x'_n$$
$$x_2 = a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 \ldots. + a_{2n} x'_n$$
$$\vdots$$
$$x_n = a_{n1} x'_1 + a_{n2} x'_2 \ldots. + a_{nn} x'_n$$

als Ausdruck der Bewegung eines starren Punktsystems gefasst wird, so bleibt einerseits der Anfangspunkt fest, andererseits, da durch eine orthogonale Substitution die Quadratsumme der alten in die Quadratsumme der neuen Variabelen übergeführt wird, die Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkt ungeändert. Eine solche Bewegung kann daher passend als „Bewegung um einen festen Punkt“ bezeichnet werden.

6. Die Projectionen einer Strecke auf die Coordinatenaxen sind die Differenzen der gleichnamigen Coordinaten ihres End- und Anfangspunktes. Die Länge der Strecke ist gleich der Quadratwurzel aus der Quadratsumme ihrer Axenprojectionen.

7. Dividirt man die Coordinaten eines Punktes durch seine Entfernung vom Anfangspunkt, so stellen diese Quotienten beziehungsweise die „Richtungscosinus“ d. h. die Cosinus der Winkel dar, welche der Radiusvector mit den Axen bildet.

Der Cosinus des von zwei Strahlen gebildeten Winkels ist, wenn $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2 \ldots. \cos \alpha_n$, respective $\cos \alpha'_1, \cos \alpha'_2 \ldots$ $\cos \alpha'_n$ die Richtungscosinus beider Strahlen sind:

$$\cos \vartheta = \cos \alpha_1 . \cos \alpha'_1 + \cos \alpha_2 . \cos \alpha'_2 \ldots + \cos \alpha_n . \cos \alpha'_n.$$

Daher ergibt sich, wenn die Coordinaten eines Punktes P des einen und eines Punktes P' des anderen Strahles gegeben sind:

$$\cos POP' = \frac{x_1 . x'_1 + x_2 . x'_2 \ldots\ldots + x_n . x'_n}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2)}\sqrt{(x'^2_1 + x'^2_2 \ldots + x'^2_n)}}.$$

Die beiden Strahlen OP und OP' heissen zu einander orthogonal, wenn

$$x_1 . x'_1 + x_2 . x'_2 \ldots + x_n . x'_n = 0$$

ist. Sei nun die x_i- Axe der Ort aller Punkte, deren Coordinate x_i beliebig ist, während alle übrigen Coordinaten sämmtlich $= 0$ sind, so bilden die Coordinatenaxen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ ein in dem von uns definirten Sinne orthogonales Axensystem.

I.

Die unendlich kleine Bewegung.

Denken wir uns ein absolut festes und ein mit dem um den Anfangspunkt beweglichen starren System fest verbundenes scundäres Coordinatenaxensystem, so wird ein bewegter Punkt gegen dieses letzere dieselbe relative Lage, d. h. diejenigen Coordinaten behalten, welche er in dem Augenblicke besass, als das secundäre mit dem absolut festen Axensystem coincidirte. Diesem Anfangszustand entsprach die identische Substitution: $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2, \ldots x_n = x'_n$, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, \ldots\ldots, & 0 \\ 0, & 1, \ldots\ldots, & 0 \\ \vdots & & \\ 0, & 0, \ldots\ldots, & 1 \end{vmatrix}$$

den Werth $+1$ hat, welchen Werth die Substitutionsdeterminante nothwendig auch dann besitzt, wenn nach Verlauf einer gewissen Zeit t das secundäre (x'-)System durch eine continuirliche Bewegung in eine Lage gekommen ist, welche durch die orthogonale Substitution:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, x'_1 + a_{12}\, x'_2 \ldots\ldots + a_{1n}\, x'_n \\ x_2 &= a_{21}\, x'_1 + a_{22}\, x'_2 \ldots\ldots + a_{2n}\, x'_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}\, x'_1 + a_{n2}\, x'_2 \ldots\ldots + a_{nn}\, x'_n \end{aligned}$$

ausgedrückt wird. In dieser Substitution bezeichnen die Coeffizienten $a_{1i}, a_{2i} \dots . a_{ni}$ die Richtungscosinus, welche die x'_i-Axe gegen das feste (x-)Axensystem zur Zeit t besitzt. — Betrachten wir die unendlich kleine Bewegung in dem nun folgenden Zeitelement dt, so erhalten wir, da die secundären Coordinaten (x') ungeändert bleiben und nur die Richtungscosinus (a) der Axen des secundären Systems unendlich kleine Aenderungen erleiden:

$$\delta x_1 = x'_1\, \delta a_{11} + x'_2\, \delta a_{12} \dots .. + x'_n\, \delta a_{1n}$$
$$\delta x_2 = x'_1\, \delta a_{21} + x'_2\, \delta a_{22} \dots .. + x'_n\, \delta a_{2n}$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = x'_1\, \delta a_{n1} + x'_2\, \delta a_{n2} \dots .. + x'_n\, \delta \alpha_{nn}.$$

Vermittelst der inversen Substitution

$$x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 \dots . + a_{n1}\, x_n$$
$$x'_2 = a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \dots . + \alpha_{n2}\, x_2$$
$$\vdots$$
$$x'_n = a_{1n}\, x_1 + a_{2n} x_2 \dots . + a_{nn}\, x_n$$

drückt sich nun die Coordinatenvariation δx_i durch die Coordinaten $x_1, x_2 \dots . x_n$ aus, wie folgt:

$$\delta x_i = \delta a_{i1}\,(a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 \dots .. + a_{n1}\, x_n)$$
$$+ \delta a_{i2}\,(a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \dots .. + a_{n2}\, x_n)$$
$$\vdots$$
$$+ \delta a_{in}\,(a_{1n}\, x_1 + a_{2n}\, x_2 \dots .. + a_{nn}\, x_n)$$
$$= g_{1i}\, x_1 + g_{2i}\, x_2 \dots .. + g_{ni}\, x_n,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$g_{\varkappa i} = a_{\varkappa i}\, \delta a_{i1} + a_{\varkappa 2}\, \delta a_{i2} \dots . + a_{\varkappa n}\, \delta a_{in}.$$

Demnach erhält man für die Verschiebungsprojectionen δx_1, $\delta x_2 \dots . \delta x_n$ das folgende Gleichungssystem:

$$\delta x_1 = g_{11}\, x_1 + g_{21}\, x_2 \dots .. + g_{n1}\, x_n$$
$$\delta x_2 = g_{12}\, x_1 + g_{22}\, x_2 \dots .. + g_{n2}\, x_n$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = g_{1n}\, x_1 + g_{2n}\, x_2 \dots .. + g_{nn}\, x_n.$$

Die analytische Mechanik lehrt, dass sich jede beliebige Bewegung eines starren Systems um einen festen Punkt auf die Drehung um eine feste Axe reducirt. Dieselbe Frage

für eine unendlich kleine Verrückung in einem idealen Raume von n Dimensionen gestellt, beantwortet sich durch eine Discussion des vorstehenden Gleichungssystems. Für diejenigen Punkte, welche etwa bei der Bewegung ihre Lage nicht geändert haben, müssen die Verschiebungsprojectionen $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ sämmtlich verschwinden, ihre Coordinaten müssen also den folgenden n Gleichungen genügen:

(1)
$$\begin{aligned} g_{11} x_1 + g_{21} x_2 \ldots + g_{n1} x_n &= 0 \\ g_{12} x_1 + g_{22} x_2 \ldots + g_{n2} x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ g_{1n} x_1 + g_{2n} x_2 \ldots + g_{nn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Sollen diese Gleichungen durch andere, als die Werthe $x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$, welche den festen Anfangspunkt bezeichnen, befriedigt werden, so muss die Determinante derselben verschwinden, es muss also:

$$G = \Sigma \pm g_{11} g_{22} \ldots g_{nn} = 0$$

sein.

Zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution bestehen $\frac{n(n+1)}{2}$ fundamentale Bedingungsgleichungen. Es ist nämlich für beliebiges i

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 \ldots + a_{in}^2 = 1$$

und für zwei verschiedene Nummern i, $\varkappa$

$$a_{i1} a_{\varkappa 1} + a_{i2} a_{\varkappa 2} \ldots + a_{in} a_{\varkappa n} = 0.$$

Die Variationen δa sind daher an die Relationen gebunden:

$$g_{ii} = 0, \quad g_{i\varkappa} + g_{\varkappa i} = 0, \text{ oder } g_{i\varkappa} = - g_{\varkappa i}.$$

Die Determinante G ist demnach schief und symmetrisch; sie verschwindet für ungerades n, während sie für gerades n ein vollkommenes Quadrat bildet, im Allgemeinen also positiv ist.

Ist nun n ungerade, so verschwinden, während G verschwindet, in der Regel nicht alle ersten Minoren dieser Determinante. Denn die ersten Hauptminoren sind schief-symmetrische Determinanten $(n-1)$ten, also geraden Grades, bilden daher vollständige Quadrate und sind im Allgemeinen jede

für sich von 0 verschieden. Das System der Gleichungen (1), welche die Ruhe eines Punktes ausdrücken, ist alsdann nur einfach unbestimmt und wird durch die Proportion:

(2) $$x_1 : x_2 \ldots\ldots : x_n = \gamma_{1i} : \gamma_{2i} \ldots\ldots : \gamma_{ni}$$

befriedigt, wobei $\gamma_{\varkappa i}$ die dem Elemente $g_{\varkappa i}$ in G entsprechende erste Minore bezeichnet, und mindestens γ_{ii} von 0 verschieden ist. Alle Punkte, welche bei der unendlich kleinen Bewegung unverrückt geblieben sind, liegen auf demjenigen Strahl, welcher ebensowohl durch das einfach unbestimmte Gleichungssystem (1) als durch die Proportion (2) dargestellt wird: kurz für ungerades n gibt es eine feste Axe.

Ist nun n gerade, so ist im Allgemeinen nicht, wie es für die Ruhe eines anderen als des Anfangspunktes erforderlich ist, $G = 0$, es gibt dann ausser dem Nullpunkt keine unverrückt gebliebenen Punkte, also auch keine feste Axe: in diesem Falle fragen wir nach dem Ort derjenigen Punkte, welche eine maximale Drehung erlitten haben.

Wenn wir mit δs den unendlich kleinen Weg eines bewegten Punktes und mit r seine Entfernung vom Anfangspunkt bezeichnen, so ist die angulare Verschiebung:

$$\vartheta = \frac{\delta s}{r} = \frac{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 \ldots\ldots + \delta x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 \ldots\ldots + x_n^2}}$$

$$\vartheta^2 = \frac{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 \ldots\ldots + \delta x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 \ldots\ldots + x_n^2}.$$

Soll nun für gewisse Werthe $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ die Function ϑ^2 ein Maximnm werden, so muss ihr erstes Differential, und weil ϑ^2 eine Function der n willkürlichen Variabelen $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ist, so müssen alle ersten partiellen Differentialquotienten von ϑ^2, genommen nach $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ einzeln verschwinden.

Es ist: $r^2 \vartheta^2 = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 \ldots\ldots + \delta x_n^2$. Diese Gleichung partiell nach x_i differenzirt ergibt:

$$r^2 \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i} + \vartheta^2 \frac{\partial r^2}{\partial x_i}$$

$$= 2\left(\delta x_1 \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_i} + \delta x_2 \frac{\partial(\delta x_2)}{\partial x_i} \dots + \frac{\delta x_n \partial(\delta x_n)}{\partial x_i}\right).$$

Nun war: $\delta x_\varkappa = g_{1\varkappa}\, x_1 + g_{2\varkappa}\, x_2 \dots + g_{n\varkappa}\, x_n$, daher ist $\frac{\partial(\delta x_\varkappa)}{\partial x_i} = g_{i\varkappa}$, und wir erhalten, da ausserdem $\frac{\partial r^2}{\partial x_i} = 2\, x_i$:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i} + x_i\, \vartheta^2$$

$$= \delta x_1\, g_{i1} + \delta x_2\, g_{i2} \dots + \delta x_n\, g_{in}$$

$$= s_{i1}\, x_1 + s_{i2}\, x_2 \dots + s_{in}\, x_n,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$g_{i1}\, g_{\varkappa 1} + g_{i2}\, g_{\varkappa 2} \dots + g_{in}\, g_{\varkappa n} = s_{i\varkappa},$$

und wobei $s_{i\varkappa} = s_{\varkappa i}$.

Schliesslich wird:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i} = s_{i1}\, x_1 + s_{i2}\, x_2 \dots + (s_{ii} - \vartheta^2)\, x_i \dots + s_{in}\, x_n.$$

Wir erhalten daher als Bedingung für das gleichzeitige Verschwinden aller ersten partiellen Differentialquotienten von ϑ^2 das folgende lineare Gleichungssystem, welchem die Punkte maximaler Winkelverschiebung genügen müssen:

$$(3) \quad \begin{array}{l} (s_{11} - \vartheta^2)\, x_1 + s_{12}\, x_2 \dots + s_{1n}\, x_n = 0 \\ s_{21}\, x_1 + (s_{22} - \vartheta^2)\, x_2 \dots + s_{2n}\, x_n = 0 \\ \vdots \\ s_{n1}\, x_1 + s_{n2}\, x_2 \dots + (s_{nn} - \vartheta^2)\, x_n = 0. \end{array}$$

Die Möglichkeit des gleichzeitigen Bestehens dieser Gleichungen für andere als den Nullpunkt ist durch das Verschwinden ihrer Determinante bedingt und die maximalen Werthe der Function ϑ^2 können keine anderen sein als die Wurzeln der Gleichung:

$$S(\vartheta^2) = \begin{vmatrix} s_{11} - \vartheta^2, & s_{12}, & \dots s_{1n} \\ s_{21}, & s_{22} - \vartheta^2, & \dots s_{2n} \\ \vdots & & \\ s_{n1}, & s_{n2}, & \dots s_{nn} - \vartheta^2 \end{vmatrix} = 0$$

Anmerkung. Wir bezeichnen vorläufig alle Wurzeln ϑ^2 der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ als Maximalwerthe, indem wir die Entscheidung darüber, ob jede einzelne Wurzel wirklich einen maximalen oder minimalen oder auch nur für gewisse Punkte constanten Drehungswinkel ergibt, einer späteren Discussion des zweiten Differentials von ϑ^2 vorbehalten.

Die Determinante $S(\vartheta^2)$ ist das Quadrat der Determinante

$$G(i\vartheta) = \begin{vmatrix} g_{11} - i\vartheta, & g_{12}, \dots g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22} - i\vartheta, \dots g_{2n} \\ \vdots & \\ g_{n1}, & g_{n2}, \dots g_{nn} - i\vartheta \end{vmatrix}$$

Denn das Element $c_{i\varkappa}$ des Quadrats dieser Determinante setzt sich aus den Elementen der $i$ten und der $\varkappa$ten Zeile von $G(i\vartheta)$ zusammen, wie folgt:

$$\begin{aligned} c_{i\varkappa} &= g_{i1}\, g_{\varkappa 1} + g_{i2}\, g_{\varkappa 2} \dots + (g_{ii} - i\vartheta)\, g_{\varkappa i} \dots \\ &+ g_{i\varkappa}\,(g_{\varkappa\varkappa} - i\vartheta) \dots + g_{in}\, g_{\varkappa n} = s_{i\varkappa} - i\vartheta\,(g_{\varkappa i} + g_{i\varkappa}) \\ &= s_{i\varkappa}, \text{ weil } g_{i\varkappa} + g_{\varkappa i} = 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Ebenso wird:

$$\begin{aligned} c_{ii} &= g_{i1}^2 + g_{i_2} \dots + (g_{ii} - i\vartheta)^2 \dots + g_{in}^2 = s_{ii} - \vartheta^2 - 2 g_{ii}\, i\vartheta \\ &= s_{ii} - \vartheta^2, \text{ wegen } g_{ii} = 0. \end{aligned}$$

Wird nun die Determinante $G(i\vartheta)$ nach Potenzen von $i\vartheta$ entwickelt, so verschwinden die Coeffizienten der ungeraden Potenzen und es wird:

$$\begin{aligned} G(i\vartheta) = G(0) - \vartheta^2 \Sigma G_2(0) + \vartheta^4 \Sigma G_4(0) \dots \\ + (-1)^{\alpha}\, \vartheta^{2\alpha} \Sigma G_{2\alpha}(0) \dots + (-1)^{\frac{n}{2}}\, \vartheta^{n}, \end{aligned}$$

und zwar bezeichnet hierin $G_{2\alpha}(0)$ eine Hauptminore 2αter Ordnung oder $(n-2\alpha)$ten Grades für $\vartheta^2 = 0$ und $\Sigma G_{2\alpha}(0)$ die Summe aller $\binom{n}{2\alpha}$ Hauptminoren dieser Art. Offenbar kann nun die Gleichung $G(i\vartheta) = 0$ keine negative Wurzel ϑ^2 besitzen, da sonst alle Glieder von $G(i\vartheta)$ positiv würden, also nicht die Summe 0 ergeben könnten: die Wurzeln ϑ^2 von $G(i\vartheta) = 0$ sind also entweder positiv oder imaginär. Nun ist aber $S(\vartheta^2) = [G(i\vartheta)]^2$, folglich besitzt die Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ jede einfache Wurzel der Gleichung $G(i\vartheta) = 0$ doppelt und

jede α-fache Wurzel derselben 2αmal. Dass aber die Gleichung $S(\vartheta^2)=0$ ihrerseits keine imaginäre Wurzel ϑ^2 besitzen kann, lässt sich auf folgende Art beweisen.

Sind die Elemente $c_{i\varkappa}$ und $c_{\varkappa i}$ complex und conjugirt, so verschwindet die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} c_{11}+x, & c_{12}, & \ldots\ldots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}+x, & \ldots\ldots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots\ldots & c_{nn}+x \end{vmatrix}$$

nur für reelle Werthe von x. Denn hätte die Gleichung $D=0$ eine complexe Wurzel x_1, so müssten die Coordinaten z eines reellen oder imaginären Punktes z das folgende Gleichungssystem befriedigen

$$\text{a)}\qquad \begin{aligned} c_{11} z_1 + c_{12} z_2 \ldots + c_{1n} z_n &= - x_1 z_1 \\ c_{21} z_1 + c_{22} z_2 \ldots + c_{2n} z_n &= - x_1 z_2 \\ &\vdots \\ c_{n1} z_1 + c_{n2} z_2 \ldots + c_{nn} z_n &= - x_1 z_n \end{aligned}$$

und ebenso müssten die Coordinaten z' des conjugirten Punktes z', wofern x_2 die zu x_1 conjugirte Wurzel bezeichnet, den folgenden Gleichungen

$$\text{b)}\qquad \begin{aligned} c_{11} z'_1 + c_{21} z'_2 \ldots + c_{n1} z'_n &= - x_2 z'_1 \\ c_{12} z'_1 + c_{22} z'_2 \ldots + c_{n2} z'_n &= - x_2 z'_2 \\ &\vdots \\ c_{1n} z'_1 + c_{2n} z'_2 \ldots + c_{nn} z'_n &= - x_2 z'_n \end{aligned}$$

genügen, da die Gleichungen b) von selbst aus den Gleichungen a) folgen, wenn man $+i$ mit $-i$ vertauscht ($i=\sqrt{-1}$). Multiplicirt man nun die Gleichungen a) beziehungsweise mit $z'_1, z'_2 \ldots z'_n$ und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen b)

$$- x_1 (z_1 z'_1 + z_2 z'_2 \ldots + z_n z'_n) = - x_2 (z_1 z'_1 + z_2 z'_2 \ldots + z_n z'_n),$$

oder $(x_1 - x_2)\,\Sigma(zz') = 0$, und da der Voraussetzung nach x_1 nicht reell, also von x_2, und damit $x_1 - x_2$ von 0 verschieden ist:

$$\Sigma(zz') = 0.$$

Da es sich im vorliegenden Falle nicht etwa um die Coordinanten des Nullpunktes handelt und das Product irgend zweier conjugirt complexen Werthe z und z' positiv ist, so ist auch $\Sigma(zz')$ stets positiv. Die durch die Annahme, dass die Gleichung $D = 0$ eine imaginäre Wurzel besitze, postulirte Relation $\Sigma(zz') = 0$ ist daher unmöglich, jene Annahme selbst also falsch und damit die Behauptung bewiesen, dass die Gleichung $D(x) = 0$ nur reelle Wurzeln besitzt.

Dieser Satz findet auf die Gleichung

$$S(\vartheta^2) = \begin{vmatrix} s_{11} - \vartheta^2, & s_{12} \ldots . & s_{1n} \\ s_{21}, & s_{22} - \vartheta^2 \ldots . & s_{2n} \\ \vdots & & \\ s_{n1}, & s_{n2} \ldots . & s_{nn} - \vartheta^2 \end{vmatrix} = 0$$

volle Anwendung, da $s_{i\varkappa}$ reell und $= s_{\varkappa i}$ ist. Demnach sind die Wurzeln ϑ^2 der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ weder imaginär, noch negativ; alle maximalen Werthe ϑ^2 sind daher positiv und das entsprechende ϑ selbst hat nicht etwa einen imaginären, sondern einen reellen Werth.

Einer jeden Wurzel ϑ^2 der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ entspricht nun ein Ort von Punkten maximaler Verrückung, welcher durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(s_{11} - \vartheta^2)\, x_1 + s_{12}\, x_2 \ldots + s_{1n}\, x_n = 0 \\ &s_{21}\, x_1 + (s_{22} - \vartheta^2)\, x_2 \ldots + s_{2n}\, x_n = 0 \\ &\vdots \\ &s_{n1}\, x_1 + s_{n2}\, x_2 \ldots + (s_{nn} - \vartheta^2)\, x_n = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

repräsentirt wird und dessen Natur davon abhängig ist, ob ϑ^2 eine doppelte oder 2αfache Wurzel der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ ist.

Je nach diesen beiden Fällen ergeben sich für die Minoren der Determinante $S(\vartheta^2)$ gewisse Folgerungen, welche wir vorerst allgemein für die Gleichung

$$D(x) = \begin{vmatrix} c_{11} + x, & c_{12}, \ldots . & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22} + x, \ldots . & c_{2n} \\ \vdots & & \\ c_{n1}, & c_{n2}, \ldots . & c_{nn} + x \end{vmatrix} = 0$$

unter der Voraussetzung ableiten wollen, dass die Elemente $c_{i\varkappa}$ und $c_{\varkappa i}$ complex und zu einander conjugirt sind. Der zu beweisende Satz lautet:

„Wenn die Gleichung $D(x) = 0$ eine αfache Wurzel $x = x_0$ besitzt, so müssen für $x = x_0$ alle Minoren erster, zweiter . . bis $(\alpha - 1)$ter Ordnung der Determinante $D(x)$ verschwinden."

Soll die Gleichung $D(x) = 0$ die Wurzel $x = x_0$ αfach, so muss die Gleichung $D'(x) = \frac{d\,D(x)}{dx} = 0$ dieselbe Wurzel $(\alpha - 1)$fach besitzen; mit anderen Worten: Soll $D(x)$ durch $(x - x_0)^\alpha$, so muss $D'(x)$ durch $(x - x_0)^{\alpha - 1}$ ohne Rest theilbar sein. Nach steigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickelt ist die betrachtete Determinante

$$D(x) = D(x_0) + (x - x_0)\,\Sigma D_1(x_0) +$$
$$(x - x_0)^2\,\Sigma D_2(x_0) \ldots + (x - x_0)^\alpha\,\Sigma D_\alpha(x_0) \ldots + (x - x_0)^n,$$

und zwar bezeichnet $D_\alpha(x_0)$ irgend eine Hauptminore αter Ordnung und $\Sigma D_\alpha(x_0)$ die Summe aller $\binom{n}{\alpha}$ Hauptminoren dieser Art. Damit nun $x = x_0$ eine αfache Wurzel der Gleichung $D(x) = 0$ sei, müssen $D(x_0)$, $\Sigma D_1(x_0)$, $\Sigma D_2(x_0)$ .... $\Sigma D_{\alpha-1}(x_0)$ einzeln verschwinden, speciell muss $D'(x) = \Sigma D_1(x)$ durch den Factor $(x - x_0)^{\alpha - 1}$ ohne Rest theilbar sein.

Bilden wir zu $D(x)$ die adjungirte und aus derselben die partiale Determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma_{ii}, \gamma_{i\varkappa} \\ \gamma_{\varkappa i}, \gamma_{\varkappa\varkappa} \end{vmatrix} = D(x)\,.\,D_{i\varkappa}(x),$$

wobei $D_{i\varkappa}(x)$ den Coeffizienten von $(c_{ii} + x)(c_{\varkappa\varkappa} + x)$ in $D(x)$ bedeutet, so erhalten wir

$$\gamma_{ii}\,\gamma_{\varkappa\varkappa} - \gamma_{i\varkappa}\,\gamma_{\varkappa i} = D(x)\,.\,D_{i\varkappa}(x),$$
$$\gamma_{\varkappa\varkappa} = \frac{\gamma_{i\varkappa}\,\gamma_{\varkappa i} + D(x)\,D_{i\varkappa}(x)}{\gamma_{ii}}$$

und folglich:

$$D'(x) = \Sigma D_1(x) = \gamma_{11} + \gamma_{22} \ldots + \gamma_{nn}$$

$$= \frac{\gamma_{i1}\gamma_{1i} + \gamma_{i2}\gamma_{2i} \ldots + \gamma_{in}\gamma_{ni} + D(x) \sum\limits_{\varkappa} D_{i\varkappa}(x)}{\gamma_{ii}}.$$

Da $\sum\limits_{\varkappa} D_{i\varkappa}(x)$ für $\varkappa = 1, 2 \ldots n$, excl. $\varkappa = i$ zu bilden ist, so folgt, dass $\sum\limits_{\varkappa} D_{i\varkappa}(x)$ die erste Derivirte von γ_{ii}, also $= \gamma'_{ii}$ ist. Demnach wird

$$D'(x) = \frac{\gamma_{i1}\gamma_{1i} + \gamma_{i2}\gamma_{2i} \ldots + \gamma_{in}\gamma_{ni} + D(x)\gamma'_{ii}}{\gamma_{ii}}.$$

Sei nun γ_{ii} höchstens durch $(x - x_0)^{\alpha_i}$ theilbar, so ist es der Zähler von $D'(x)$, da der Bruch überhaupt durch $(x - x_0)^{\alpha - 1}$ theilbar sein muss, durch $(x - x_0)^{\alpha_i + \alpha - 1}$. Das letzte Zählerglied $D(x)\gamma'_{ii}$ ist für sich jedenfalls durch $(x - x_0)^{\alpha_i + \alpha - 1}$ theilbar, denn $D(x)$ enthält der Voraussetzung nach den Factor $(x - x_0)^{\alpha}$, ebenso γ'_{ii} als erste Derivirte von γ_{ii} den Factor $(x - x)^{\alpha_i - 1}$; daher muss auch die vorangehende Summe

$$\gamma_{i1}\gamma_{1i} + \gamma_{i2}\gamma_{2i} \ldots + \gamma_{in}\gamma_{ni}$$

durch $(x - x_0)^{\alpha_i + \alpha - 1}$ theilbar sein.

Nach der über die Elemente $c_{i\varkappa}$ und $c_{\varkappa i}$ gemachten Voraussetzung sind die beiden Minoren $\gamma_{i\varkappa}$ und $\gamma_{\varkappa i}$ ebenfalls zu einander conjugirt, woraus folgt, dass $\gamma_{i\varkappa}$ und $\gamma_{\varkappa i}$ gleichzeitig durch dieselbe höchste Potenz von $x - x_0$, etwa durch $(x - x)^{\alpha_\varkappa}$ theilbar sind. Vertauscht man nämlich in dem Quotienten $\frac{\gamma_{i\varkappa}}{(x - x_0)^{\alpha_\varkappa}}$ — die Variabele x und damit auch $x - x_0$ als reell vorausgesetzt — die imaginäre Einheit $+i$ mit $-i$, so erhält man für den Quotienten $\frac{\gamma_{\varkappa i}}{(x - x_0)^{\alpha_\varkappa}}$ den zu jenem conjugirten complexen Werth. Setzt man daher $\gamma_{i\varkappa} = (x - x_0)^{\alpha_\varkappa} . p_i$, so ist $\gamma_{\varkappa i} = (x - x_0)^{\alpha_\varkappa} . q_i$, wobei p_i und q_i einander conjugirt und nicht mehr durch $x - x_0$ theilbar sind, und es ergibt sich

$$\gamma_{i1}\gamma_{1i} + \gamma_{i2}\gamma_{2i} \ldots + \gamma_{in}\gamma_{ni} = \sum_{\varkappa}(x - x_0)^{2\alpha_\varkappa} p_\varkappa q_\varkappa.$$

Sei nun unter den ganzen Zahlen $\alpha_\varkappa (\varkappa = 1, 2 \ldots n)$ α' die niedrigste, so ist die vorstehende Summe durch keine höhere als die $2\alpha'$te Potenz von $(x - x_0)$ theilbar. Denn dividirt man die genannte Summe durch $(x - x_0)^{2\alpha'}$, so erhält man als Quotienten $(p'q' + \ldots.)$, wobei p' und q' den Factor $x - x_0$ sicher nicht mehr enthalten. Setzt man nun in dem Quotienten $x = x_0$, so erhält man ein positives Resultat, da mindestens $p'q'$ positiv ist, die folgenden Glieder allenfalls $= 0$, nicht aber negativ sein können, und hieraus folgt, dass der Quotient $(p'q' + \ldots)$ den Factor $x - x_0$ nicht mehr enthält. Es war bereits festgestellt, dass die Summe $\sum\limits_\varkappa \gamma_{i\varkappa}\gamma_{\varkappa i}$ mindestens durch $(x - x_0)^{\alpha_i + \alpha - 1}$ theilbar sein muss, und da sie höchstens durch $(x - x_0)^{2\alpha'}$ theilbar ist, so folgt:

$$2\alpha' \geqq \alpha + \alpha_i - 1, \text{ und da } \alpha_i \geqq \alpha'$$
$$2\alpha' \geqq \alpha + \alpha' - 1, \text{ endlich}$$
$$\alpha' \geqq \alpha - 1, \text{ d. h.:}$$

Jede der Minoren $\gamma_{i1}, \gamma_{i2} \ldots. \gamma_{in}$ muss für beliebiges i, kurz: es muss jede erste Minore der Determinante $D(x)$ mindestens durch $(x - x_0)^{\alpha - 1}$ theilbar sein.

Bilden wir nun aus der zu $D(x)$ adjungirten eine partiale Determinante βten, d. h. niedrigeren als αten Grades, so ist

$$\Sigma \pm \gamma_{i\varkappa}\gamma_{rs}\gamma_{tu} \ldots. = (D(x))^{\beta - 1}. D_{i\varkappa, rs, tu} \ldots.,$$

worin $D_{i\varkappa, rs, tu} ..$ die zur Determinante $\Sigma \pm \gamma_{i\varkappa}\gamma_{rs}\gamma_{tu} \ldots.$ in D complimentäre Determinante, also den Coeffizienten des Productes $c_{i\varkappa} c_{rs} c_{tu} \ldots$ in $D(x)$, d. h. irgend eine beliebige Minore βter Ordnung — denn $i, r, t \ldots., \varkappa, s, u \ldots$ sind je β beliebig aus der Reihe $1, 2 \ldots. n$ herausgegriffene Indices — bezeichnet.

Nun ist jedes Element von $\Sigma \pm \gamma_{i\varkappa}, \gamma_{rs}, \gamma_{tu} \ldots.$ durch $(x - x)^{\alpha - 1}$, diese Determinante selbst also durch $(x - x_0)^{\beta(\alpha - 1)}$ theilbar; $D(x)$ ist durch $(x - x_0)^\alpha$, $(D(x))^{\beta - 1}$ durch $(x - x_0)^{\alpha(\beta - 1)}$ theilbar, daher muss wegen

$$\Sigma \pm \gamma_{i\varkappa}, \gamma_{rs}, \gamma_{tu} \ldots. = (D(x))^{\beta - 1}. D_{i\varkappa, rs, tu} \ldots.$$

$D_{i\varkappa, rs, tu} \ldots$ durch $(x - x_0)^{\beta(\alpha-1)-(\beta-1)\alpha}$, also durch $(x-x_0)^{\alpha-\beta}$ theilbar sein. Mit anderen Worten:

Ist $x = x_0$ eine αfache Wurzel der Gleichung $D(x) = 0$, so muss für $x = x_0$ jede Minore niedrigerer als αter Ordnung verschwinden. — Wollten wir annehmen, dass für $x = x_0$ auch alle Minoren αter Ordnung verschwinden, so wäre auch sicher $\Sigma D_\alpha(x_0) = 0$ und $x = x_0$ nicht mehr, wie vorausgesetzt, eine αfache, sondern mindestens eine $(\alpha + 1)$fache Wurzel der Gleichung

$$D(x) = 0.$$

Für $\alpha = 2$ ergibt sich der Beweis des vorstehenden Satzes auch in der folgenden einfacheren Weise:

Soll $x = x_0$ eine doppelte Wurzel sein, so erhalten wir $D(x) = 0$, $\Sigma D_1(x_0) = 0$. Gleichzeitig mit $D(x_0)$ ist auch die partiale Determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma_{ii}, \gamma_{i\varkappa} \\ \gamma_{\varkappa i}, \gamma_{\varkappa\alpha} \end{vmatrix} = \gamma_{ii}\,\gamma_{\varkappa\varkappa} - \gamma_{i\varkappa}\,\gamma_{\varkappa i} = 0,$$

sobald $x = x_0$ gesetzt wird. Nun muss $\Sigma\gamma_{ii} = 0$ sein. Gesetzt, eine der ersten Hauptminoren, etwa γ_{ii} wäre nicht $= 0$, so müsste, weil $\gamma_{ii}\,\gamma_{\varkappa\varkappa} = \gamma_{i\varkappa}\,\gamma_{\varkappa i}$, die Minore $\gamma_{\varkappa\varkappa}$ entweder gleichzeitig mit $\gamma_{i\varkappa}$ oder $\gamma_{\varkappa i} = 0$, oder aber mit γ_{ii} vor demselben Vorzeichen sein, da $\gamma_{i\varkappa}$ und $\gamma_{\varkappa i}$ zu einander conjugirt sind, also ein positives Product ergeben. Jede etwa nicht verschwindende erste Hauptminore müsste mit γ_{ii} dasselbe Vorzeichen haben, es könnte also $\Sigma\gamma_{ii}$ unmöglich verschwinden. Diese für das Vorhandensein einer Doppelwurzel nothwendige Bedingung verlangt daher, dass zunächst alle ersten Hauptminoren und wegen $\gamma_{ii}\,\gamma_{\varkappa\varkappa} = \gamma_{i\varkappa}\,\gamma_{\varkappa i}$ überhaupt alle ersten Minoren für $x = x_0$ verschwinden.

Der im Vorstehenden begründete Satz, nach welchem unter Voraussetzung reeller oder conjugirt complexer Elemente $c_{i\varkappa}$ und $c_{\varkappa i}$ die Gleichung $D(x) = 0$ nur reelle Wurzeln hat, und für eine αfache Wurzel dieser Gleichung alle Minoren erster, zweiter, bis $(\alpha - 1)$ter Ordnung verschwinden, ist in der Algebra von grosser Wichtigkeit. So z. B. spielt

derselbe eine Rolle bei der simultanen Transformation zweier homogener quadratischer Formen φ und ψ in die Formen

$$\varphi \equiv y_1^2 + y_2^2 \ldots . + y_n^2$$
$$\psi \equiv s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 \ldots . + s_n y_n^2.$$

Anlässlich dieses Problemes findet er sich behandelt von Weierstrass in den Berliner Monatsberichten von 1858 und 1868, ausserdem von Christoffel, der das Weierstrass'sche Theorem für bilineare Formen verallgemeinert, in Crelle's Journal, Band 63. In Verbindung mit optischen Untersuchungen ist derselbe Satz entwickelt von Clebsch, Crelle's Journal, Band 62, pag. 232.

Kehren wir nun zu dem Gleichungssystem

$$(3) \quad \begin{array}{l} (s_{11} - \vartheta^2)\, x_1 + s_{12}\, x_2 \ldots . + s_{1n}\, x_n = 0 \\ s_{21}\, x_1 + (s_{22} - \vartheta^2)\, x_2 \ldots . + s_{2n}\, x_n = 0 \\ \vdots \\ s_{n1}\, x_1 + s_{n2}\, x_2 \ldots . + (s_{nn} - \vartheta^2)\, x_n = 0, \end{array}$$

welchem die Punkte maximaler Winkelverschiebuug genügen müssen, zurück. Ist ϑ^2 eine doppelte Wurzel der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$, so verschwinden ausser $S(\vartheta^2)$ alle ersten, nicht aber alle zweiten Minoren dieser Determinante. Das System der Gleichungen (3) wird daher doppelt unbestimmt, d. h. reducirt sich auf $n - 2$ von einander unabhängige Gleichungen, und zwei Coordinaten eines Punktes maximaler Drehung bleiben willkürlich variabel, während sich alle übrigen $n - 2$ Coordinaten als homogene lineare Functionen derselben ergeben. Der Ort aller Punkte derselben maximalen Drehung ϑ ist folglich eine Ebene, und wenn alle Wurzeln der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ nur doppelt vorkommen, so erhalten wir $\frac{n}{2}$ „Hauptebenen“ d. h. Ebenen constanter maximaler Drehung. Wir haben bereits gezeigt, dass die Coordinaten zweier Punkte P und P', welche die Gleichungen (3) für zwei verschiedene doppelte Wurzeln ϑ^2 und ϑ'^2 befriedigen, stets die Relation:

$$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 \ldots + x_n x'_n = 0$$

erfüllen. Die nach beliebigen Punkten irgend zweier Hauptebenen gehenden Strahlen, überhaupt alle verschiedenen $\frac{n}{2}$ Hauptebenen sind zu einander orthogonal. Wählt man daher in jeder Hauptebene zwei zu einander senkrechte Axen, so erhält man ein System von n zu einander orthogonalen Axen.

Wenn ϑ^2 eine 2αfache Wurzel der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ ist, so verschwinden für dieselbe ausser $S(\vartheta^2)$ auch alle ersten, zweiten .... $(2\alpha - 1)$ten, nicht aber alle 2αten Minoren; das Gleichungssystem (3) reducirt sich auf $n - 2\alpha$ von einander unabhängige Gleichungen, welche also ein lineares Continuum von 2α Dimensionen bestimmen, das zu allen übrigen Hauptebenen und Hauptcontinuen orthogonal ist. Denn die Relation

$$\Sigma x_i x'_i = 0$$

besteht bei zwei ungleichen Wurzeln ϑ^2 und ϑ'^2 unabhängig davon, ob dieselben doppelte oder 2αfache Wurzeln der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$ sind.

Um schliesslich darüber zu entscheiden, ob eine Wurzel ϑ^2 factisch ein Maximum oder Minimum sei, haben wir das zweite Differential dieser Wurzel ϑ^2 zu bilden und zu prüfen, ob dasselbe immer einerlei Zeichens, oder im Stande ist sein Vorzeichen zu wechseln.

Seien die Coordinaten $x_1, x_2 \ldots . x_n$ willkürliche Functionen derselben Variabelen t, etwa $x_1 = \alpha_1 t$, $x_2 = \alpha_2 t \ldots .$ $x_n = \alpha_n t$, worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ durchaus willkürliche Coefficienten sind, so erhalten wir

$$d^2 \vartheta^2 = \left(\sum_{i\varkappa} \frac{\partial^2 \vartheta^2}{\partial x_i \, \partial x_\varkappa} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \right) \cdot dt^2$$

$$= \left(\sum_{i\varkappa} \frac{\partial^2 \vartheta^2}{\partial x_i \, \partial x_\varkappa} \cdot \alpha_i \, \alpha_\varkappa \right) dt^2,$$

die Summe $\sum\limits_{i\varkappa}$ für $i = 1, 2, \ldots n$, wie für $\varkappa = 1, 2, \ldots n$ zu bilden. — Es hatte sich oben ergeben:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i} = s_{i1} x_1 + s_{i2} x_2 \ldots + (s_{ii} - \vartheta^2) x_i \ldots s_{in} x_n.$$

Durch nochmalige Differentiation nach x_i erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(r^2 \frac{\partial^2 \vartheta^2}{(\partial x_i)^2} + \frac{\partial r^2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i}\right) = s_{ii} - \vartheta^2 - x_i \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i}.$$

Für das ϑ^2 der betrachteten Punkte ist aber $\frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i} = 0$ und folglich:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial^2 \vartheta^2}{(\partial x_i)^2} = s_{ii} - \vartheta^2; \quad \frac{\partial^2 \vartheta^2}{(\partial x_i)^2} = \frac{2(s_{ii} - \vartheta^2)}{r^2}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\left(r^2 \frac{\partial^2 \vartheta^2}{\partial x_i \partial x_\varkappa} + \frac{\partial r^2}{\partial x_\varkappa} \cdot \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i}\right) = s_{i\varkappa} - x_i \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_\varkappa}; \quad \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x_i \partial x_\varkappa} = \frac{2}{r^2} \cdot s_{i\varkappa}.$$

Demnach erhält man das zweite Differential $d^2 \vartheta^2$ unter der Form

$$d^2 \vartheta^2 = \frac{2}{r^2}\Big((s_{11} - \vartheta^2)\alpha_1^2 + 2 s_{12} \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

$$+ (s_{ii} - \vartheta^2)\alpha_i^2 \ldots + 2 s_{i\varkappa} \alpha_i \alpha_\varkappa \ldots + (s_{nn} - \vartheta^2)\alpha_n^2\Big) \cdot dt^2$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(\sum_{i\varkappa} s_{i\varkappa} \alpha_i \alpha_\varkappa - \vartheta^2 \sum_i \alpha_{ii}^2\right) dt_2^2.$$

Nun ist aber $\frac{\sum_{i\varkappa} s_{i\varkappa} \alpha_i \alpha_\varkappa}{\Sigma \alpha_{ii}^2}$ der Werth von ϑ^2 für einen Punkt, welcher vor der Bewegung die Coordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ besass, und wenn wir diesen Werth kurz mit α^2 bezeichnen, so erhalten wir

(4) $$d^2 \vartheta^2 = \frac{2 \sum_i \alpha_{ii}^2}{r^2} (\alpha^2 - \vartheta^2) \cdot dt^2.$$

Für irgend welche Punkte muss nun ϑ^2 seinen absolut grössten respective kleinsten Werth erreichen, und diese Werthe können keine andern sein, als die grösste respective kleinste Wurzel der Gleichung $S(\vartheta^2) = 0$; α^2 kann daher nie grösser als jene und nie kleiner als diese werden. Jenachdem ϑ^2 die grösste oder kleinste Wurzel von $S(\vartheta^2) = 0$ bezeichnet, ist daher $d^2 \vartheta^2$ hiermit übereinstimmend beständig negativ, respective positiv. Ist aber ϑ^2 irgend eine zwischen der grössten und kleinsten liegende Wurzel, so vermag $d^2 \vartheta^2$ sein Zeichen zu

wechseln und das betreffende ϑ ist weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern die gleiche constante Winkelverschiebung aller Punkte derselben Hauptebene, respective desselben Hauptcontinuums.

Die etwa unverrückt gebliebenen Punkte werden repräsentirt durch das oben (S. 9) aufgestellte Gleichungssystem:

$$(1) \quad \begin{aligned} g_{11} x_1 + g_{21} x_2 \dots + g_{n1} x_n &= 0 \\ g_{12} x_1 + g_{22} x_2 \dots + g_{n2} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ g_{1n} x_1 + g_{2n} x_2 \dots + g_{nn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Unter der im Allgemeinen zutreffenden Voraussetzung, dass eine schief-symmetrische Determinante nur bei ungeradem n verschwinden könne, bei geradem n dagegen positiv sein müsse, hatte sich ergeben, dass in jenem Falle eine feste Axe existirt, in diesem dagegen ausser dem Anfangspunkt keine anderen Punkte unverrückt bleiben. Dieser Schluss ist gleichbedeutend mit der Behauptung, dass $\vartheta = 0$ bei ungeradem n eine einfache und bei geradem n überhaupt keine Wurzel der Gleichung $G(i\vartheta) = 0$ sei. Es lässt sich indessen zeigen, dass auch bei geradem n die Wurzel $\vartheta = 0$ existiren und auch bei ungeradem n eine mehrfache Wurzel dieser Gleichung sein kann, dass allgemein $\vartheta = 0$ eine $(2\alpha + 1)$- oder 2αfache Wurzel der Gleichung $G(i\vartheta) = 0$ ist, jenachdem n selbst ungerade oder gerade ist.

Im ersten Falle hat man:

$$G(i\vartheta) = -i\vartheta\,(\Sigma G_1(0) - \vartheta^2 . \Sigma G_3(0) + \vartheta^4 \Sigma G_5(0) \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \vartheta^{n-1}),$$

im zweiten Falle dagegen:

$$G(i\vartheta) = G(0) - \vartheta^2 \Sigma G_2(0) + \vartheta^4 \Sigma G_4(0) \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \vartheta^n,$$

wobei alle vorkommenden Hauptminoren ebenso wie im zweiten Falle $G(0)$ der Form nach vollkommene Quadrate sind. Indessen muss auch ein solches Quadrat dann verschwinden,

wenn seine Basis verschwindet, und dieser Fall kann sehr wohl eintreten, da die n^2 Elemente $g_{i\varkappa}$ nur den $\frac{n(n+1)}{2}$ Bedingungsgleichungen

$$g_{ii} = 0, g_{i\varkappa} + g_{\varkappa i} = 0$$

unterworfen sind, ausserdem noch weiteren Relationen genügen können, vermöge deren die Basis der quadratischen Determinante $G(0)$ sowie jeder Hauptminore bis zu einer gewissen Ordnung verschwindet. Aus der vorstehenden Entwickelung von $G(i\vartheta)$ ist nun ohne Weiteres ersichtlich, dass, jenachdem n ungerade oder gerade ist, $\vartheta = 0$ nur eine $(2\alpha + 1)$- oder 2αfache Wurzel der Gleichung $G(i\vartheta) = 0$ sein kann. Entsprechend diesen beiden Fällen lässt das Gleichungssystem

$$(1) \qquad \begin{aligned} g_{11} x_1 + g_{21} x_2 \ldots . + g_{n1} x_n &= 0 \\ g_{12} x_1 + g_{22} x_2 \ldots . + g_{n2} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ g_{1n} x_1 + g_{2n} x_2 \ldots . + g_{nn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

eine ungerade oder gerade Anzahl von Coordinaten willkürlich variabel. Bei der unendlich kleinen Bewegung besteht also ein festes Continuum, dessen Dimensionenanzahl gleichzeitig mit n ungerade oder gerade ist; jenes reducirt sich in der Regel auf eine feste Axe, dieses auf den Anfangspunkt.

II.

Die endliche Bewegung.

Um die endliche Bewegung zu untersuchen nehmen wir wiederum ein absolut festes und ein mit dem drehbaren Punktsystem fest verbundenes orthogonales Axensystem an, welches beim Anfang der Bewegung mit dem festen coincidirt. — Bezeichnen wir die Anfangscoordinaten eines Punktes mit $x_1, x_2, \ldots x_n$, die Endcoordinaten, bezogen auf das feste Axensystem, mit $x'_1, x'_2, \ldots . x'_n$, so wird die ganze endliche Bewegung durch die orthogonale Substitution:

$$x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ldots . + a_{1n}\, x_n$$
$$x'_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ldots . + a_{2n}\, x_n$$
$$\vdots$$
$$x'_n = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 \ldots . + a_{nn}\, x_n$$

ausgedrückt. — Das Quadrat der Entfernung eines bewegten Punktes von seiner Anfangslage ist:

$$s^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 \ldots . + (x'_n - x_n)^2.$$

Der Quotient $\frac{s^2}{r^2}$, in welchem r den ungeänderten Radiusvector des bewegten Punktes bezeichnet, kann als Maass der angularen Verschiebung gelten.

Es wird $$\frac{s^2}{r^2} = 2(1 - \cos\vartheta),$$

$$\cos\vartheta = \frac{x_1\, x'_1 + x_2\, x'_2 \ldots . + x_n\, x'_n}{r^2}.$$

Die angulare Verschiebung wird demnach ein Maximum oder Minimum, jenachdem $\cos\vartheta$ ein Minimum oder Maximum wird. Wir erhalten nach Substitution der Werthe von $x'_1, x'_2 \ldots . x'_n$:

$$\begin{aligned} r^2 \cos\vartheta &= x_1\,(a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ldots . + a_{1n}\, x_n) \\ &\quad + x_2\,(a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ldots . + a_{2n}\, x_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_n\,(a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 \ldots . + a_{nn}\, x_n) \\ &= a_{11}\, x^2 + (a_{12} + a_{21})\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2 + \ldots . \\ &\quad \ldots + a_{ii}\, x_i^2 \ldots + (a_{i\varkappa} + a_{\varkappa i})\, x_i\, x_\varkappa \ldots + a_{nn}\, x_n^2. \end{aligned}$$

Durch partielle Differentiation nach x_i ergibt sich hieraus:

$$r^2 \cdot \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_i} + \cos\vartheta \cdot \frac{\partial r^2}{\partial x_i} = r^2 \cdot \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_i} + 2 x_i \cos\vartheta$$

$$= (a_{i1} + a_{1i})\, x_1 + (a_{i2} + a_{2i})\, x_2 \ldots .. + 2\, a_{ii}\, x_i \ldots .. + (a_{in} + a_{ni})\, x_n,$$

$$r^2 \cdot \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_i} = (a_{i1} + a_{1i})\, x_1 + (a_{i2} + a_{2i})\, x_2 \ldots . + 2(a_{ii} - \cos\vartheta)\, x_i \ldots . + (a_{in} + a_{ni})\, x_n.$$

Für Punkte maximaler Winkelverschiebung müssen $\frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_n}$ einzeln verschwinden, muss also das folgende Gleichungssystem erfüllt sein:

$$(5)\quad \begin{aligned} &2(a_{11}-\cos\vartheta)x_1+(a_{12}+a_{21})x_2\ldots+(a_{n1}+a_{1n})x_n=0\\ &(a_{21}+a_{12})x_1+2(a_{22}-\cos\vartheta)x_2\ldots+(a_{n2}+a_{2n})x_n=0\\ &\vdots\\ &(a_{n1}+a_{1n})x_1+(a_{n2}+a_{2n})x_2\ldots+2(a_{nn}-\cos\vartheta)x_n=0. \end{aligned}$$

Die Möglichkeit des gleichzeitigen Bestehens dieser Gleichungen für andere als den Nullpunkt ist an das Verschwinden ihrer Determinante gebunden, d. h. die Cosinus der maximalen Drehungswinkel sind die Wurzeln der Gleichung:

$$U=\begin{vmatrix} 2(a_{11}-\cos\vartheta), a_{12}+a_{21}\ldots a_{1n}+a_{n1}\\ a_{21}+a_{12}, 2(a_{22}-\cos\vartheta)\ldots a_{2n}+a_{n2}\\ \vdots\\ a_{n1}+a_{1n}, a_{n2}+a_{2n},\ldots 2(a_{nn}-\cos\vartheta) \end{vmatrix}=0$$

Multiplicirt man U mit der Determinante $\Sigma\pm a_{11}a_{22}\ldots.a_{nn}$ der orthogonalen Substitution, so wird das Element $c_{i\varkappa}$ des wegen $\Sigma\pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}=1$ mit U identischen Productes V

$$\begin{aligned} c_{i\varkappa}&=(a_{i1}+a_{1i})a_{\varkappa1}+(a_{i2}+a_{2i})a_{\varkappa2}\ldots\\ &\quad+2(a_{ii}-\cos\vartheta)a_{\varkappa i}\ldots+(a_{in}+a_{ni})a_{\varkappa n}\\ &=a_{i1}a_{\varkappa1}+a_{i2}a_{\varkappa2}\ldots+a_{in}a_{\varkappa n}\\ &\quad+a_{\varkappa i}a_{1i}+a_{\varkappa2}a_{2i}\ldots+a_{\varkappa n}a_{ni}\\ &\quad-2a_{\varkappa i}\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$a_{\varkappa i}a_{1i}+a_{\varkappa2}a_{2i}\ldots+a_{\varkappa n}a_{ni}=g_{\varkappa i},$$

so ist wegen $a_{i1}a_{\varkappa1}+a_{i2}a_{\varkappa2}\ldots+a_{in}a_{\varkappa n}=0$

$$c_{i\varkappa}=g_{\varkappa i}-2a_{\varkappa i}\cos\vartheta.$$

Desgleichen ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_{ii}&=(a_{i1}+a_{1i})a_{i1}+\ldots 2(a_{ii}-\cos\vartheta)a_{ii}\ldots.\\ &\quad+(a_{in}+a_{ni})a_{in},\\ c_{ii}&=\sum_r a_{ir}^2+\sum_r a_{ir}a_{ri}-2a_{ii}\cos\vartheta\\ &=1+g_{ii}-2a_{ii}\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Sei nun $e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$, ferner

$$T(\vartheta)=\begin{vmatrix} a_{11}-e^{i\vartheta}, a_{12},\ldots a_{1n}\\ a_{21}, a_{22}-e^{i\vartheta},\ldots a_{2n}\\ \vdots\\ a_{n1}, a_{n2},\ldots a_{nn}-e^{i\vartheta} \end{vmatrix}$$

$$T(-\vartheta) = \begin{vmatrix} a_{11} - e^{i\vartheta}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} - e^{-i\vartheta}, \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn} - e^{-i\vartheta} \end{vmatrix},$$

so erhält man das Element $d_{i\varkappa}$ des Productes $T(\vartheta) \,.\, T(-\vartheta)$ aus den Elementen der $i$ten Zeile von $T(\vartheta)$ und der $\varkappa$ten Colonne von $T(-\vartheta)$, wie folgt:

$$\begin{aligned} d_{i\varkappa} &= a_{i1}\, a_{1\varkappa} + a_{i2}\, a_{2\varkappa} \dots + (a_{ii} - e^{+i\vartheta})\, a_{i\varkappa} \\ &\quad \dots + a_{i\varkappa}\,(a_{\varkappa\varkappa} - e^{-i\vartheta}) \dots + a_{in}\, a_{n\varkappa} \\ &= g_{i\varkappa} - a_{i\varkappa}\,(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) = g_{i\varkappa} - 2 a_{i\varkappa} \cos\vartheta \\ d_{ii} &= a_{i1}\, a_{1i} + a_{i2}\, a_{2i} \dots + (a_{ii} - e^{i\vartheta})\,(a_{ii} - e^{-i\vartheta}) \\ &\quad \dots + a_{in}\, a_{ni} \\ &= g_{ii} + e^{i\vartheta} e^{-i\vartheta} - a_{ii}\,(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) \\ &= g_{ii} + 1 - 2 a_{ii} \cos\vartheta, \end{aligned}$$

und hieraus folgt, dass das Product $T(\vartheta) \,.\, T(-\vartheta)$ mit der Determinante V vollkommen identisch ist. $T(\vartheta)$ und $T(-\vartheta)$ sind nun nach Potenzen von $e^{i\vartheta}$ resp. $e^{-i\vartheta}$ entwickelt:

$$\begin{aligned} T(\vartheta) &= (-1)^n e^{in\vartheta} + (-1)^{n-1} e^{i(n-1)\vartheta} \Sigma D_{n-1} \dots \\ &\quad + (-1)\, e^{i\vartheta} \Sigma D_1 + D. \\ T(-\vartheta) &= (-1)^n e^{-in\vartheta} + (-1)^{n-1} e^{-i(n-1)\vartheta} \Sigma D_{n-1} \\ &\quad \dots + (-1)\, e^{-i\vartheta} \Sigma D_1 + D, \end{aligned}$$

wobei D die Determinante $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$ der orthogonalen Substitution bedeutet und folglich den Werth $+1$ hat.

Multiplicirt man $T(-\vartheta)$ mit $(-1)^n \,.\, e^{in\vartheta}$, so erhält man bei umgekehrter Anordnung der Glieder

$$\begin{aligned} (-1)^n e^{in\vartheta}\, T(-\vartheta) &= (-1)^n D\, e^{in\vartheta} + (-1)^{n-1} e^{i(n-1)\vartheta} \Sigma D_1 \\ &\quad \dots + (-1)\, e^{i\vartheta} \Sigma D_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Nun ist aber $D = 1$, ferner jede partiale Determinante D_i $i$ter Ordnung gleich der complementären Determinate D_{n-i} $(n-i)$ter Ordnung, und eine Vergleichung der letzten mit der Entwickelung von $T(\vartheta)$ zeigt, dass

$$T(\vartheta) = (-1)^n e^{in\vartheta}\, T(-\vartheta)$$

identisch richtig ist. Man erhält:

$$T(-\vartheta) = (-1)^n e^{-in\vartheta} T(\vartheta)$$

und daher

$$U = V = T(\vartheta) \,.\, T(-\vartheta) = (-1)^n e^{-in\vartheta} (T(\vartheta))^2.$$

Nun wird der Factor $(-1)^n e^{-in\vartheta}$ für keinen Werth von $D = 0$, folglich kann U nur dann verschwinden, wenn $T(\vartheta)$ verschwindet.

In Liouv. J. 19 hat Brioschi den Satz aufgestellt, dass die Gleichung $T(\vartheta) = 0$ für ungerades n die einzige reelle und zwar einfache Wurzel $e^{i\vartheta} = 1$ besitze, während alle übrigen Wurzeln imaginär und zu zweien reciprok sind, was bei geradem n überhaupt von allen Wurzeln $e^{i\vartheta}$ gelte.

Sehen wir vor der Hand von der Ausnahme ab, welche dieser Satz erleiden kann, so ist für ungerades n $\cos\vartheta = 1$ die einzige reelle und zwar einfache Wurzel der Gleichung $U = 0$, da jeder Wurzel $e^{i\vartheta}$ der Gleichung $T(\vartheta) = 0$ eine Wurzel $\cos\vartheta$ jener Gleichung entspricht. Im Uebrigen ergeben je zwei conjugirte Wurzeln $e^{i\vartheta}$ und $e^{-i\vartheta}$ dieselbe Wurzel $\cos\vartheta$ doppelt, und wenn $e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta}$ αfache Wurzeln der Gleichung $T(\vartheta) = 0$ sind, so ist das entsprechende $\cos\vartheta$ eine 2αfache Wurzel der Gleichung $U = 0$. Für $\cos\vartheta = 1, \vartheta = 0$ repräsentirt daher das Gleichungssystem (5)

$$\begin{aligned}
2(a_{11} - 1)\, x_1 + (a_{12} + a_{21})\, x_2 \ldots\ldots + (a_{1n} + a_{n1})\, x_n &= 0 \\
(a_{21} + a_{12})\, x_1 + 2(a_{22} - 1)\, x_2 \ldots + (a_{2n} + a_{n2})\, x_n &= 0 \\
\vdots \qquad & \\
(a_{n1} + a_{1n})\, x_1 + (a_{n2} + a_{2n})\, x_2 \ldots + 2(a_{nn} - 1)\, x_n &= 0
\end{aligned}$$

die feste Axe. Denn für $\cos\vartheta = 1$ verschwindet die Determinante U, nicht aber jede erste Minore, weil eben $\cos\vartheta = 1$ nur eine einfache Wurzel der Gleichung $U = 0$ ist, auf welche Gleichung, da U symmetrisch ist, die oben allgemein nachgewiesenen Sätze, dass nämlich sämmtliche Wurzeln derselben reell sein, und dass für eine 2αfache Wurzel $\cos\vartheta$ alle ersten, zweiten ... bis $(2\alpha - 1)$ten Minoren der Determinante U verschwinden müssen, volle Anwendung finden.

Uebrigens konnten die Gleichungen der festen Axe direct in der folgenden, mit der obigen aequivalenten Form erhalten werden. Für einen unverrückt gebliebenen Punkt müssen die Anfangs- und Endcoordinaten übereinstimmen, müssen also folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ldots + a_{1n}\, x_n \\ x_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ldots + a_{2n}\, x_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 \ldots + a_{nn}\, x_n \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} &(a_{11} - 1)\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ldots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ &a_{21}\, x_1 + (a_{22} - 1)\, x_2 \ldots + a_{2n}\, x_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 \ldots + (a_{nn} - 1)\, x_n = 0. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass die Determinante dieses Systems, nicht aber jede erste Minore derselben verschwindet. Das vorstehende Gleichungssytem ist demnach einfach unbestimmt und repräsentirt die feste Axe.

Für eine doppelte, resp. 2αfache Wurzel $\cos\vartheta$ wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (5)\quad &2\,(a_{11} - \cos\vartheta)\, x_1 + (a_{12} + a_{21})\, x_2 \ldots + (a_{1n} + a_{n1})\, x_n = 0 \\ &(a_{21} + a_{12})\, x_1 + 2\,(a_{22} - \cos\vartheta)\, x_2 \ldots + (a_{2n} + a_{n2})\, x_n = 0 \\ &\vdots \\ &(a_{n1} + a_{1n})\, x_1 + (a_{n2} + a_{2n})\, x_2 \ldots + 2\,(a_{nn} - \cos\vartheta)\, x_n = 0, \end{aligned}$$

doppelt, resp. 2αfach unbestimmt und repräsentirt eine Ebene, resp. ein lineares Continuum von 2α Dimensionen. Auch hier ist bei zwei verschiedenen Wurzeln $\cos\vartheta$, $\cos\vartheta'$ für zwei Punkte P und P' die Relation

$$\Sigma\, x_i\, x'_i = 0$$

richtig und alle Hauptebenen, Hauptcontinuen sind zu einander, sowie zur festen Axe orthogonal.

Für ein gerades n existiren in dem von uns vorausgesetzten Falle die Wurzeln $e^{i\vartheta} = 1$, $\cos\vartheta = 1$ der Gleichungen $T(\vartheta) = 0$, resp. $U = 0$ nicht; es gibt keine feste Axe, sondern nur Hauptebenen oder Hauptcontinuen.

Der oben, pag. 27 angeführte Satz von Brioschi ist, wie bereits bemerkt, nicht ausnahmslos richtig. Der bei Baltzer: „Theorie und Anwendung der Determinanten“ §. 14 No. 9 mitgetheilte Beweis dieses Satzes stützt sich wesentlich auf die Voraussetzung, dass bei geradem n die Determinante $\Sigma \pm d_{11}\, d_{22} \ldots . d_{nn}$ für $d_{ii} = 0$, $d_{i\varkappa} + d_{\varkappa i} = 0$ nothwendigerweise positiv sein müsse. Bei Erörterung der unendlich kleinen Bewegung ist bereits bemerkt worden, dass eine solche Determinante verschwinden muss, sobald die Basis, deren Quadrat sie bildet, verschwindet. Allgemein wurde bewiesen, dass die Gleichung $D(y) = 0$, welche dadurch entsteht, dass man den Diagonalelementen der Determinante $\Sigma \pm d_{11}\, d_{22} \ldots d_{nn}$ die Variabele y zu und den Werth der neuen Determinante gleich Null setzt, die Wurzel $y = 0$ 2αfach oder $(2\alpha + 1)$fach (incl. $\alpha = 0$) besitzt, jenachdem n gerade oder ungerade ist. In Berücksichtigung dieser Thatsache ergibt sich nun leicht, dass je nach diesen beiden Fällen die Gleichung $T(\vartheta) = 0$ die Wurzel $\vartheta = 0$, $e^{i\vartheta} = 1$ nur als 2α- respective $(2\alpha + 1)$fache Wurzel besitzen kann. Dasselbe gilt für die Wurzeln $\vartheta = 1$, $\cos\vartheta = 1$ der Gleichung $U = 0$, und das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
(5)\quad & (2a_{11} - \cos\vartheta)\, x_1 + (a_{12} + a_{21})\, x_2 \ldots + (a_{1n} + a_{n1})\, x_n = 0 \\
& (a_{21} + a_{12})\, x_1 + 2(a_{22} - \cos\vartheta)\, x_2 \ldots + (a_{2n} + a_{n2})\, x_n = 0 \\
& \vdots \\
& (a_{n1} + a_{1n})\, x_1 + (a_{n2} + a_{2n})\, x_2 \ldots + 2(a_{nn} - \cos\vartheta)\, x_n = 0
\end{aligned}
$$

lässt eine gerade oder ungerade Anzahl von Variabelen unbestimmt, jenachdem $\cos\vartheta$ eine gerade oder ungerade Wurzel der Gleichung $U = 0$ ist.

Bei der endlichen Bewegung eines starren Systems um einen festen Punkt existirt also ein festes Continuum, dessen Dimensionenanzahl mit n gleichzeitig ungerade oder gerade ist; in der Regel reducirt sich dasselbe auf eine feste Axe resp. den Anfangspunkt. — In Wirklichkeit tritt für den Satz von Brioschi die bezeichnete Modification ein und ein festes Continuum von mehreren Dimensionen auf, sobald die orthogo-

nale Substitution in mehrere simultane partielle Substitutionen für bestimmte Gruppen $x_1 \ldots x_\alpha, x_{\alpha+1} \ldots\ldots x_\beta, \ldots, x_{\gamma+1} \ldots\ldots x_n$ der n Variabelen zerfällt und mehrere, etwa λ, dieser Gruppen eine ungerade Anzahl von Variabelen umfassen. Dann zerfällt die Determinante $T(\vartheta)$ in das Product mehrerer Hauptminoren, und da λ gleichzeitig mit n gerade oder ungerade sein muss, so hat dem entsprechend die Gleichung $T(\vartheta) = 0$ die Wurzel $\vartheta = 0$, $(e^{i\vartheta} = 1)$ 2α- resp. $(2\alpha + 1)$mal.

Um zu beurtheilen, welche Wurzeln $\cos\vartheta$ der Gleichung $U = 0$ thatsächlich einer maximalen oder minimalen Drehung entsprechen, bilden wir das zweite totale Differential von $\cos\vartheta$, indem wir durch die Substitution

$$x_1 = a_1\, t,\; x_2 = a_2\, t \ldots,\; x_n = a_n\, t$$

die Function

$$\cos\vartheta = \frac{\sum\limits_{i\varkappa} (a_{i\varkappa} + a_{\varkappa i}) x_i\, x_\varkappa}{\sum\limits_i x_i^2}$$

von der einen Veränderlichen t abhängig machen. Es wird:

$$d^2 \cos\vartheta = \left(\sum_{i\varkappa} \frac{\partial^2 \cos\vartheta}{\partial x_i\, \partial x_\varkappa} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \right) \cdot dt^2.$$

Es war bereits gefunden:

$$r^2 \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_i} = (a_{i1} + a_{1i})\, x_1 \ldots + 2(a_{ii} - \cos\vartheta)\, x_i$$
$$\ldots + (a_{in} + a_{ni})\, x_n,$$

und hieraus findet sich, da wir das zweite Differential für Punkte maximaler Drehung bilden, für welche also alle ersten partiellen Differentialquotienten verschwinden:

$$r^2 \frac{\partial^2 \cos\vartheta}{\partial x_i\, \partial x_\varkappa} = a_{i\varkappa} + a_{\varkappa i}$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \cos\vartheta}{(\partial x_i)^2} = 2(a_{ii} - \cos\vartheta).$$

Schliesslich erhält man:

$$\frac{r^2}{2}\, d^2 \cos\vartheta = [(a_{11} - \cos\vartheta)\, \alpha_1^2 + (a_{12} + a_{21})\, \alpha_1\, \alpha_2 + \ldots$$
$$+ (a_{ii} - \cos\vartheta)\, \alpha_i^2 + \ldots + (a_{i\varkappa} + a_{\varkappa i})\, \alpha_i\, \alpha_\varkappa$$
$$\ldots + (a_{nn} - \cos\vartheta)\, \alpha_n^2]\, dt^2.$$
$$= \Big[\sum_{i\varkappa} (a_{i\varkappa} + a_{\varkappa i})\, \alpha_i\, \alpha_\varkappa - \cos\vartheta \sum_i \alpha_i^2\Big]\, dt^2$$
$$= \Big[\sum_i \alpha_i^2 . (\cos\alpha - \cos\vartheta)\Big]\, dt^2, \text{ wobei}$$
$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i\varkappa} (a_{i\varkappa} + a_{\varkappa i})\, \alpha_i\, \alpha_\varkappa}{\sum_i \alpha_i^2}$$

den Verschiebungscosinus irgend eines Punktes bezeichnet, der vor der Drehung die ganz willkürlichen Coordinaten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ besass. Die grösste resp. kleinste Drehung, welche überhaupt irgend welche Punkte erlitten haben, entspricht der kleinsten resp. grössten Wurzel der Gleichung $U = 0$ und daher kann $\cos\alpha$ nie kleiner als jene und nie grösser als diese werden. In Uebereinstimmung mit der Annahme, dass $\cos\vartheta_0$ die kleinste, $\cos\vartheta_1$ die grösste Wurzel bezeichne, ist für dieselben

$$d^2 \cos\vartheta$$

stets positiv resp. negativ. Ist aber $\cos\vartheta$ irgend eine andere zwischen $\cos\vartheta_0$ und $\cos\vartheta_1$ liegende Wurzel, so ist die quadratische Form für $d^2 \cos\vartheta$ nicht mehr definit und die betreffende Hauptebene (resp. d. e. Hauptcontinuum) ist der Ort aller Punkte gleicher, aber nicht relativ grösster oder kleinster Winkelverschiebung ϑ.

Ist $\cos\vartheta$ eine doppelte Wurzel der Gleichung $U = 0$, so stellen die Gleichungen

a)
$$\begin{aligned}
&(a_{11} - e^{i\vartheta})x_1 + a_{12}\, x_2 \;\ldots\; + a_{1n}\, x_n = 0 \\
&a_{21}\, x_1 + (a_{22} - e^{i\vartheta})x_2 \;\ldots\; + a_{2n}\, x_n = 0 \\
&\vdots \\
&a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_n \;\ldots\; + (a_{nn} - e^{i\vartheta})x_u = 0
\end{aligned}$$

und

b) $$(a_{11} - e^{-i\vartheta})x_1 + a_{12}\, x_2 \;\ldots\; + a_{1n}\, x_n = 0$$
$$a_{21}\, x_1 + (a_{22} - e^{-i\vartheta})\, x_2 \;\ldots\; + a_{2n}\, x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 \;\ldots\; + (a_{nn} - e^{-i\vartheta})x_n = 0$$

zwei Strahlen dar, welche in der Hauptebene

$$2(a_{11} - \cos\vartheta)x_1 + (a_{12} + a_{21})x_2 \;\ldots\; + (a_{1n} + a_{n1})x_n = 0$$
$$(a_{21} + a_{12})x_1 + 2(_{22} - \cos\vartheta)x_2 \;\ldots\; + (a_{2n} + a_{n2})x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$(a_{n1} + a_{1n})x_1 + (a_{n2} + a_{2n})\, x_2 \ldots + 2(a_{nn} - \cos\vartheta)x_n = 0$$

liegen und nach den festen imaginären Kreispunkten im Unendlichen gehen. Denn multiplicirt man die Gleichungen a) des ersten Strahls beziehungsweise mit $a_{1i}, a_{2i} \ldots a_{ni}$ und addirt, so erhält man wegen $\sum\limits_r a_{ri}^2 = 1$, $\sum\limits_r a_{r\varkappa}\, a_{ri} = 0$ die abgeleitete Gleichung

$$-(a_{1i}\, x_1 + a_{2i}\, x_2 \ldots + a_{ni}\, x_n)\, e^{i\vartheta} + x_i = 0$$

oder $$a_{1i}\, x_1 + a_{2i}\, x_2 \ldots + (a_{ii} - e^{-i\vartheta})\, x_i \ldots + a_{ni}\, x_n = 0.$$

Indem man dieses Verfahren für $i = 1, 2 \ldots, n$ ausführt und die erhaltenen Gleichungen zu den ihnen entsprechenden des Systems a) addirt, so erhält man die Gleichungen der Hauptebene; der imaginäre Strahl a) liegt folglich in derselben, da zugleich mit seinen Gleichungen auch diejenigen der Hauptebenen erfüllt sind.

Schreiben wir nun die Gleichungen a) des ersten Strahls in der Form:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ldots + a_{1n}\, x_n = e^{i\vartheta}\, x_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ldots + a_{2n}\, x_n = e^{i\vartheta}\, x_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 \ldots + a_{nn}\, x_n = e^{i\vartheta}\, x_n$$

quadriren und addiren, so erhalten wir

$$(e^{2i\vartheta} - 1)\,(x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2) = 0.$$

Es ist aber $e^{2i\vartheta} \gtrless 1$, denn $e^{i\vartheta} = +1$ entspricht der festen Axe, von welcher hier nicht die Rede ist, und eine Wurzel

$e^{i\vartheta} = -1$ der Gleichung $T(\vartheta) = 0$ existirt nicht, woraus folgt, dass für alle Punkte des Strahls a) die Gleichung

$$x_1^2 + x_1^2 \ldots + x_n^2 = 0$$

erfüllt ist.

In derselben Weise lässt sich von dem conjugirten Strahl b) zeigen, dass er in derselben Hauptebene liegt, sowie dass seine Coordinaten die Relation $x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2 = 0$ erfüllen.

Die analytische Geometrie lehrt, dass alle Kreise derselben Ebene durch zwei feste imaginäre Punkte der unendlich entfernten Graden dieser Ebene gehen, und zwar sind dies diejenigen Punkte, in welchen der in zwei conjugirte Strahlen $x \pm iy = 0$ degenerirende Kreis $x^2 + y^2 = 0$ die unendlich entfernte Grade schneidet, d. h. jene beiden Strahlen gehen nach den beiden unendlich entfernten Kreispunkten der Ebene. In gleicher Weise haben alle Kreise unserer Hauptebene diejenigen beiden Punkte gemein, in welchen der in die beiden conjugirten Strahlen a) und b) degenerirende Kreis $x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2 = 0$ die unendlich entfernte Grade schneidet, d. h. die beiden Strahlen a) und b) gehen nach den festen imaginären Kreispunkten der Hauptebene im Unendlichen.

Wenn die Gleichung $T(\vartheta) = 0$ eine αfache Wurzel $e^{i\vartheta}$, die Gleichung $U = 0$ also eine 2αfache Wurzel $\cos\vartheta$ besitzt, so bestimmt dieselbe, wie wir gesehen haben, ein $(\infty^{2\alpha})$, welches zu allen übrigen Hauptcontinuen oder Hauptebenen orthogonal ist. Nun kann man in jedem $(\infty^{2\alpha})$ α zu einander orthogonale Hauptebenen, in jeder Hauptebene zwei zu einander orthogonale Strahlen wählen, und diese Strahlen bilden zusammen mit der etwaigen festen Axe ein System von n orthogonalen Axen.

In einem $(\infty^{2\alpha})$ fixirt man nämlich eine Ebene dadurch, dass man $2\alpha - 2$ der willkürlichen Variabelen als homogene lineare Functionen von den beiden übrigen abhängig macht. Die den Gleichungen des $(\infty^{2\alpha})$ hinzugefügten $2\alpha - 2$ Gleichungen, welche in dem $(\infty^{2\alpha})$ eine Ebene bestimmen, sind in einfachster Form

$$x_1 = a_1 x + b_1 y$$
$$x_2 = a_2 x + b_2 y$$
$$\vdots$$
$$x_{2\alpha-2} = a_{2\alpha-2} x + b_{2\alpha-2} y$$

und enthalten also $2(2\alpha - 2) = 4(\alpha - 1)$ willkürliche Constanten. Wählt man nun in dem $(\infty^{2\alpha})\alpha$ Ebenen, so enthalten ihre Gleichungen $4\alpha(\alpha - 1)$ willkürliche Constanten. Sollen irgend zwei dieser Ebenen orthogonal zu einander sein, so ist die Bedingung nothwendig, dass

$$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 \ldots + x_n x'_n = 0$$

sei, wenn $x_1, x_2, \ldots . x_n$ ein beliebiger Punkt der einen, und $x'_1, x'_2 \ldots . x'_n$ ein beliebiger Punkt der anderen Ebene ist. Alle Coordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ drücken sich als homogene lineare Functionen zweier unabhängiger Variabelen x, y, alle Coordinaten $x'_1, x'_2 \ldots . x'_n$ in gleicher Weise durch zwei willkürliche Variabele x', y' aus. Die obige Bedingungsgleichung nimmt daher die Form an

$$\sum_i (a_i x + b_i y)(a'_i x' + b'_i y') = 0$$

oder auch

$$xx' \sum_i a_i a'_i + xy' \sum_i a_i b'_i$$
$$+ x'y \sum_i a'_i b_i + yy' \sum_i b_i b'_i = 0.$$

Soll diese Gleichung für beliebige Werthepaare von x, y, x', y' erfüllt sein, so müssen die Coeffizienten von xx', xy', $x'y$, yy' einzeln für sich verschwinden, und die Bedingungsgleichung für die Orthogonalität der beiden Ebenen löst sich in die vier besonderen Gleichungen

$$\sum_i a_i a'_i = 0, \quad \sum_i a_i b'_i = 0$$
$$\sum_i a'_i b_i = 0, \quad \sum_i b_i b'_i = 0$$

auf. Für die gegenseitige Orthogonalität je zweier der α im $(\infty^{2\alpha})$ gewählten Ebenen erhält man daher $4 \cdot \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} =$ $2\alpha(\alpha - 1)$ Gleichungen zwischen den $4\alpha(\alpha - 1)$ Constanten, von denen daher $2\alpha(\alpha - 1)$ beliebig wählbar bleiben. Wählt